

附件 1

中国大学生数学竞赛竞赛大纲(2009 年)

为了进一步推动高等学校数学课程的改革和建设,提高大学数学课程的教学水平,激励大学生学习数学的兴趣,发现和选拔数学创新人才,更好地实现“中国大学生数学竞赛”的目标,特制订本大纲。

一、竞赛的性质和参赛对象

“中国大学生数学竞赛”的目的是:激励大学生学习数学的兴趣,进一步推动高等学校数学课程的改革和建设,提高大学数学课程的教学水平,发现和选拔数学创新人才。

“中国大学生数学竞赛”的参赛对象为大学本科二年级及二年级以上的在校大学生。

二、竞赛的内容

“中国大学生数学竞赛”分为数学专业类竞赛题和非数学专业类竞赛题。

(一)中国大学生数学竞赛(数学专业类)竞赛内容为大学本科数学专业基础课的教学内容,即,数学分析占 50%,高等代数占 35%,解析几何占 15%,具体内容如下:

I 数学分析部分

一、集合与函数

1. 实数集 \mathbb{R} 、有理数与无理数的稠密性，实数集的界与确界、确界存在性定理、闭区间套定理、聚点定理、有限覆盖定理.

2. \mathbb{R}^2 上的距离、邻域、聚点、界点、边界、开集、闭集、有界（无界）集、 \mathbb{R}^2 上的闭矩形套定理、聚点定理、有限复盖定理、基本点列，以及上述概念和定理在 \mathbb{R}^n 上的推广.

3. 函数、映射、变换概念及其几何意义，隐函数概念，反函数与逆变换，反函数存在性定理，初等函数以及与之相关的性质.

二、极限与连续

1. 数列极限、收敛数列的基本性质（极限唯一性、有界性、保号性、不等式性质）.

2. 数列收敛的条件（Cauchy 准则、迫敛性、单调有界原理、数列收敛与其子列收敛的关系），极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ 及其应用.

3. 一元函数极限的定义、函数极限的基本性质（唯一性、局部有界性、保号性、不等式性质、迫敛性），归结原则和 Cauchy 收敛准则，两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 及其应用，计算一元函数极限的各种方法，无穷小量与无穷大量、阶的比较，记号 o 与 o 的意义，多元函数重极限与累次极限概念、基本性质，二元函数的二重极限与累次极限的关系.

4. 函数连续与间断、一致连续性、连续函数的局部性质（局部有界性、保号性），有界闭集上连续函数的性质（有界性、最大值最小值定理、介值定理、一致连续性）。

三、一元函数微分学

1. 导数及其几何意义、可导与连续的关系、导数的各种计算方法，微分及其几何意义、可微与可导的关系、一阶微分形式不变性。

2. 微分学基本定理：Fermat 定理，Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理，Taylor 公式(Peano 余项与 Lagrange 余项)。

3. 一元微分学的应用：函数单调性的判别、极值、最大值和最小值、凸函数及其应用、曲线的凹凸性、拐点、渐近线、函数图象的讨论、洛必达（L'Hospital）法则、近似计算。

四、多元函数微分学

1. 偏导数、全微分及其几何意义，可微与偏导存在、连续之间的关系，复合函数的偏导数与全微分，一阶微分形式不变性，方向导数与梯度，高阶偏导数，混合偏导数与顺序无关性，二元函数中值定理与 Taylor 公式。

2. 隐函数存在定理、隐函数组存在定理、隐函数（组）求导方法、反函数组与坐标变换。

3. 几何应用（平面曲线的切线与法线、空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线）.

4. 极值问题（必要条件与充分条件），条件极值与 Lagrange 乘数法.

五、一元函数积分学

1. 原函数与不定积分、不定积分的基本计算方法（直接积分法、换元法、分部积分法）、有理函数积分：

$\int R(\cos x, \sin x)dx$ 型， $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ 型.

2. 定积分及其几何意义、可积条件（必要条件、充要条件： $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$ ）、可积函数类.

3. 定积分的性质（关于区间可加性、不等式性质、绝对可积性、定积分第一中值定理）、变上限积分函数、微积分基本定理、N-L 公式及定积分计算、定积分第二中值定理.

4. 无限区间上的广义积分、Cauchy 收敛准则、绝对收敛与条件收敛、 $f(x)$ 非负时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性判别法（比较原则、柯西判别法）、Abel 判别法、Dirichlet 判别法、无界函数广义积分概念及其收敛性判别法.

5. 微元法、几何应用（平面图形面积、已知截面面积函数的体积、曲线弧长与弧微分、旋转体体积），其他应用.

六、多元函数积分学

1. 二重积分及其几何意义、二重积分的计算（化为累次积分、极坐标变换、一般坐标变换）.

2. 三重积分、三重积分计算（化为累次积分、柱坐标、球坐标变换）.

3. 重积分的应用（体积、曲面面积、重心、转动惯量等）.

4. 含参量正常积分及其连续性、可微性、可积性，运算顺序的可交换性. 含参量广义积分的一致收敛性及其判别法，含参量广义积分的连续性、可微性、可积性，运算顺序的可交换性.

5. 第一型曲线积分、曲面积分的概念、基本性质、计算.

6. 第二型曲线积分概念、性质、计算；Green 公式，平面曲线积分与路径无关的条件.

7. 曲面的侧、第二型曲面积分的概念、性质、计算，奥高公式、Stoke 公式，两类线积分、两类面积分之间的关系.

七、无穷级数

1. 数项级数

级数及其敛散性，级数的和，Cauchy 准则，收敛的必要条件，收敛级数基本性质；正项级数收敛的充分必要条件，比较原则、比式判别法、根式判别法以及它们的极限形式；交错级数的 Leibniz 判别法；一般项级数的绝对收敛、条件收敛性、Abel 判别法、Dirichlet 判别法.

2. 函数项级数

函数列与函数项级数的一致收敛性、Cauchy 准则、一致收敛性判别法 (M-判别法、Abel 判别法、Dirichlet 判别法)、一致收敛函数列、函数项级数的性质及其应用.

3. 幂级数

幂级数概念、Abel 定理、收敛半径与区间, 幂级数的一致收敛性, 幂级数的逐项可积性、可微性及其应用, 幂级数各项系数与其和函数的关系、函数的幂级数展开、Taylor 级数、Maclaurin 级数.

4. Fourier 级数

三角级数、三角函数系的正交性、 2π 及 $2l$ 周期函数的 Fourier 级数展开、Beseel 不等式、Riemanm-Lebesgue 定理、按段光滑函数的 Fourier 级数的收敛性定理.

II 高等代数部分

一、多项式

1. 数域与一元多项式的概念
2. 多项式整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法
3. 互素、不可约多项式、重因式与重根.
4. 多项式函数、余数定理、多项式的根及性质.
5. 代数基本定理、复系数与实系数多项式的因式分解.

6. 本原多项式、Gauss 引理、有理系数多项式的因式分解、Eisenstein 判别法、有理数域上多项式的有理根.

7. 多元多项式及对称多项式、韦达(Vieta)定理.

二、行列式

1. n 级行列式的定义.

2. n 级行列式的性质.

3. 行列式的计算.

4. 行列式按一行(列)展开.

5. 克拉默(Cramer)法则.

三、线性方程组

1. 高斯(Gauss)消元法、线性方程组的初等变换、线性方程组的一般解.

2. n 维向量的运算与向量组.

3. 向量的线性组合、线性相关与线性无关、两个向量组的等价.

4. 向量组的极大无关组、向量组的秩.

5. 矩阵的行秩、列秩、秩、矩阵的秩与其子式的关系.

6. 线性方程组有解判别定理、线性方程组解的结构.

7. 齐次线性方程组的基础解系、解空间及其维数.

四、矩阵

1. 矩阵的概念、矩阵的运算(加法、数乘、乘法、转置等运算)及其运算律.

2. 矩阵乘积的行列式、矩阵乘积的秩与其因子的秩的关系.

3. 矩阵的逆、伴随矩阵、矩阵可逆的条件.

4. 分块矩阵及其运算与性质.

5. 初等矩阵、初等变换、矩阵的等价标准形.

6. 分块初等矩阵、分块初等变换.

五、双线性函数与二次型

1. 二次型及其矩阵表示.

2. 二次型的标准形、化二次型为标准形的配方法、初等变换法、正交变换法.

3. 复数域和实数域上二次型的规范形的唯一性、惯性定理.

4. 正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵.

六、线性空间

1. 线性空间的定义与简单性质.

2. 维数, 基与坐标.

3. 基变换与坐标变换.

4. 线性子空间.

5. 子空间的交与和、维数公式、子空间的直和.

七、线性变换

1. 线性变换的定义、线性变换的运算、线性变换的矩阵.

2. 特征值与特征向量、可对角化的线性变换.
3. 相似矩阵、相似不变量、哈密尔顿-凯莱定理.
4. 线性变换的值域与核、不变子空间.

八、欧氏空间

1. 内积和欧氏空间、向量的长度、夹角与正交、度量矩阵.
2. 标准正交基、正交矩阵、施密特(Schmidt)正交化方法.
3. 欧氏空间的同构.
4. 正交变换、子空间的正交补.
5. 对称变换、实对称矩阵的标准形.
6. 主轴定理、用正交变换化实二次型或实对称矩阵为标准形.

III 解析几何部分

一、向量与坐标

1. 向量的定义、表示、向量的线性运算、向量的分解、几何运算.
2. 坐标系的概念、向量与点的坐标及向量的代数运算.
3. 向量在轴上的射影及其性质、方向余弦、向量的夹角.

4. 向量的数量积、向量积和混合积的定义、几何意义、运算性质、计算方法及应用.

5. 应用向量求解一些几何、三角问题.

二、轨迹与方程

1. 曲面方程的定义: 普通方程、参数方程(向量式与坐标式之间的互化)及其关系.

2. 空间曲线方程的普通形式和参数方程形式及其关系.

3. 建立空间曲面和曲线方程的一般方法、应用向量建立简单曲面、曲线的方程.

4. 球面的标准方程和一般方程、母线平行于坐标轴的柱面方程.

三、平面与空间直线

1. 平面方程、直线方程的各种形式, 方程中各有关字母的意义.

2. 从决定平面和直线的几何条件出发, 选用适当方法建立平面、直线方程.

3. 根据平面和直线的方程, 判定平面与平面、直线与直线、平面与直线间的位置关系.

4. 根据平面和直线的方程及点的坐标判定有关点、平面、直线之间的位置关系、计算他们之间的距离与交角等; 求两异面直线的公垂线方程.

四、二次曲面

1. 柱面、锥面、旋转曲面的定义，求柱面、锥面、旋转曲面的方程.

2. 椭球面、双曲面与抛物面的标准方程和主要性质，根据不同条件建立二次曲面的标准方程.

3. 单叶双曲面、双曲抛物面的直纹性及求单叶双曲面、双曲抛物面的直母线的方法.

4. 根据给定直线族求出它表示的直纹面方程，求动直线和动曲线的轨迹问题.

五、二次曲线的一般理论

1. 二次曲线的渐进方向、中心、渐近线.

2. 二次曲线的切线、二次曲线的正常点与奇异点.

3. 二次曲线的直径、共轭方向与共轭直径.

4. 二次曲线的主轴、主方向，特征方程、特征根.

5. 化简二次曲线方程并画出曲线在坐标系的位置草图.

(二) 中国大学生数学竞赛(非数学专业类)竞赛内容为大学本科理工科专业高等数学课程的教学内容，具体内容如下:

一、函数、极限、连续

1. 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.

2. 函数的性质: 有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.

4. 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.

5. 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.

6. 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.

7. 函数的连续性(含左连续与右连续)、函数间断点的类型.

8. 连续函数的性质和初等函数的连续性.

9. 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

二、一元函数微分学

1. 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线.

2. 基本初等函数的导数、导数和微分的四则运算、一阶微分形式的不变性.

3. 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法.

4. 高阶导数的概念、分段函数的二阶导数、某些简单函数的 n 阶导数.

5. 微分中值定理, 包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理.

6. 洛必达(L'Hospital)法则与求未定式极限.

7. 函数的极值、函数单调性、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线(水平、铅直和斜渐近线)、函数图形的描绘.

8. 函数最大值和最小值及其简单应用.

9. 弧微分、曲率、曲率半径.

三、一元函数积分学

1. 原函数和不定积分的概念.

2. 不定积分的基本性质、基本积分公式.

3. 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、变上限定积分确定的函数及其导数、牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式.

4. 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法.

5. 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分.

6. 广义积分.

7. 定积分的应用: 平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力及函数的平均值.

四、常微分方程

1. 常微分方程的基本概念：微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等.

2. 变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、全微分方程.

3. 可用简单的变量代换求解的某些微分方程、可降阶的高阶微分方程： $y^{(n)} = f(x)$ ， $y'' = f(x, y')$ $y'' = f(y, y')$.

4. 线性微分方程解的性质及解的结构定理.

5. 二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程.

6. 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程：自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数，以及它们的和与积

7. 欧拉(Euler)方程.

8. 微分方程的简单应用

五、向量代数和空间解析几何

1. 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积.

2. 两向量垂直、平行的条件、两向量的夹角.

3. 向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦.

4. 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程.

5. 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离.

6. 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形.

7. 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

六、多元函数微分学

1. 多元函数的概念、二元函数的几何意义.

2. 二元函数的极限和连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质.

3. 多元函数偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件.

4. 多元复合函数、隐函数的求导法.

5. 二阶偏导数、方向导数和梯度.

6. 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.

7. 二元函数的二阶泰勒公式.

8. 多元函数极值和条件极值、拉格朗日乘数法、多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

七、多元函数积分学

1. 二重积分和三重积分的概念及性质、二重积分的计算(直角坐标、极坐标)、三重积分的计算(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

2. 两类曲线积分的概念、性质及计算、两类曲线积分的关系.

3. 格林(Green)公式、平面曲线积分与路径无关的条件、已知二元函数全微分求原函数.

4. 两类曲面积分的概念、性质及计算、两类曲面积分的关系.

5. 高斯(Gauss)公式、斯托克斯(Stokes)公式、散度和旋度的概念及计算.

6. 重积分、曲线积分和曲面积分的应用(平面图形的面积、立体图形的体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等).

八、无穷级数

1. 常数项级数的收敛与发散、收敛级数的和、级数的基本性质与收敛的必要条件.

2. 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨(Leibniz)判别法.

3. 任意项级数的绝对收敛与条件收敛.

4. 函数项级数的收敛域与和函数的概念.

5. 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）、收敛域与和函数.

6. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)、简单幂级数的和函数的求法.

7. 初等函数的幂级数展开式.

8. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlei)定理、函数在 $[-1,1]$ 上的傅里叶级数、函数在 $[0,1]$ 上的正弦级数和余弦级数.